J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
9 (1974) 451-464

PROLONGEMENTS D'HOMOMORPHISMES D'ALGEBRES DE LIE FILTREES TRANSITIVES

ALEXIS PETITJEAN

Dans [7] Rim a démontré certains théorèmes d'existence de prolongements d'homomorphismes injectifs d'algèbres de Lie tronquées. Plus tard, Hayashi dans [5] a donné des démonstrations plus simples de certains théorèmes de Rim et a démontré des théorèmes d'existence et unicité de prolongements d'homomorphismes injectifs d'algèbres de Lie filtrées transitives. Ces théorèmes se déduisent d'ailleurs, facilement, des résultats de Rim.

Pour ce travail, nous avons été inspirés de ces deux travaux. En ce qui concerne la terminologie et les notations, nous avons préféré, pour diverses raisons, celles de Rim. Notre but est de généraliser certains résultats obtenus par Rim et Hayashi, afin de pouvoir aborder le problème d'équivalence, au sens de E. Cartan, des pseudo-groupes de Lie infinitésimaux, transitifs et analytiques, qui sera l'objet d'une publication ultérieure de Monsieur Alexandre Rodrigues et de l'auteur.

On commence par rappeler quelques notations et démontrer certaines propriétés concernant les homomorphismes d'algèbres de Lie filtrées. Ensuite on considère un espace vectoriel V de dimension finie et l'on étudie l'algèbre de Lie filtrée $D(V)$ des dérivations de l'algèbre fitrée $\hat{S}(V^*)$ des séries formelles à coefficients dans le dual V^* de V. En vue d'applications géométriques, on y donne, également la démonstration d'un théorème de Monsieur Alexandre Rodrigues caractérisant tous les automorphismes de $D(V)$.

La troisième partie est consacrée à l'étude de l'ensemble $\pi_n(V)$ (V étant un espace vectoriel de dimension $n + m$) des sous-algèbres n-projetables de $D(V)$, i.e., l'ensemble des sous-algèbres transitives L de $D(V)$ pour lesquelles il existe un homomorphisme $h: L \to D(W)$ (W étant un espace vectoriel de dimension n), tel que $h(L)$ soit une sous-algèbre transitive de $D(W)$ (un tel homomorphisme sera appelé une projection).

Dans la quatrième et dernière partie, on s'intéresse à deux problèmes de prolongement. Le premier peut s'énoncer comme suit: étant donnée $L \in \pi_n(V)$ et une projection $h: L \to D(W)$, trouver la plus grande sous-algèbre de $D(V)$ sur laquelle on peut prolonger h. La réponse donnée ici est que cette "plus grande sous-algèbre de Lie de $D(V)$" existe et est unique. En plus le prolongement de h à cette algèbre est unique. Ce résultat (corollaire 4.4) constitue,

Received February 20, 1973.

dans une certaine mesure une généralisation du théorème 1 de [5].

Le deuxième problème pose la question d'existence de certains homomorphismes d'algèbres de Lie tronquées (théorème 4.5). Le résultat obtenu est une généralisation du corollaire 3.6 de [7].

Ce travail a été effectué à l'Université de São Paulo, au Brésil, à l'aide d'une bourse de l'Organisation des Etats Américains et sous l'orientation de mon cher professeur et ami Monsieur Alexandre A. M. Rodrigues.

1. Préilminaires

Le corps de base de tous les espaces vectoriels et algèbres de Lie qui interviendront sera un corps commutatif Δ de caractéristique nulle. Lorsque nous parlerons d'espaces vectoriels, ou algèbres de Lie, topologiques, nous supposerons Δ muni de la topologie discrète. Toutes les algèbres de Lie filtrées considérées seront supposées géométriques et séparées pour la topologie associée à leur filtration. En ce qui concerne les notations employées ici, on pourra se reporter à la liste des notations située à la fin.

Commençons par rappeler le résultat, bien connu, suivant:

1.1. *Si L est une algèbre de Lie filtrée transitive, l'unique idéal de L contenu dans L^0 est l'idéal nul.*

1.2. Proposition. *On considère deux algèbres de Lie filtrées L_1 et L_2 et un homomorphisme d'algèbres de Lie $h\colon L_1 \to L_2$ tel que $h(L_1^0) \subset L_2^0$. On pose* $\mathrm{gr}_{-1} L_1 = V_1$, $\mathrm{gr}_{-1} L_2 = V_2$ *et* $\varphi = \mathrm{gr}_{-1} h\colon V_1 \to V_2$.

1) *On suppose L_2 transitive et h surjectif. Alors h est un homomorphisme d'algèbres de Lie filtrées.*

2) *Si L_1 est transitive et φ bijectif, alors h est injectif.*

3) *On suppose L_1 et L_2 transitives, h surjectif et φ bijectif. Alors h est un isomorphisme d'algèbres de Lie filtrées.*

4) *Si L_2 est transitive et s'il existe un homomorphisme bijectif d'algèbres de Lie filtrées $f\colon L_1 \to L_2$, tel que* $\ker \varphi \subset \ker \mathrm{gr}_{-1} f$, *alors h est injectif.*

Démonstration. 1) On montre que $h(L_1^k) \subset L_2^k$, pour tout $k \geq 0$, par récurrence sur k. On a, par hypothèse, $h(L_1^0) \subset L_2^0$. Supposons que $h(L_1^k) \subset L_2^k$ $(k \geq 0)$ et soit $x \in L_1^{k+1}$; on a, en particulier, $x \in L_1^k$ donc $h(x) \in L_2^k$. Soit $y \in L_2$; puisque h est surjective, il existe $z \in L_1$ tel que $h(z) = y$. On a $[x, z] \in L_1^k$ donc $[h(x), y] \in L_2^k$. Comme L_2 est transitive, ceci implique, $h(x) \in L_2^{k+1}$.

2) Comme $\ker h$ est un idéal de L_1, il suffit, d'après 1.1, de montrer que $\ker h \subset L_1^0$. Soit $x \in \ker h$; on a $\varphi(\rho_{-1}(x)) = 0$ donc $\rho_{-1}(x) = 0$, i.e., $x \in L_1^0$.

3) D'après 2), h est bijectif. Soit $y \in L_2^0$ et posons $x = h^{-1}(y)$. On a $\varphi(\rho_{-1}(x)) = 0$ donc $\rho_{-1}(x) = 0$, i.e., $x \in L_1^0$. Par suite $h(L_1^0) = L_2^0$ ce qui, d'après 1), implique $h(L_1^k) = L_2^k$ pour tout $k \geq 0$.

4) Soit $x \in \ker h$; on a, en particulier, $\varphi(\rho_{-1}(x)) = 0$ donc $\mathrm{gr}_{-1} f(\rho_{-1}(x)) = 0$, i.e., $f(x) \in L_2^0$. Il en résulte que $f(\ker h) \subset L_2^0$. Comme f est surjectif, $f(\ker h)$ est un idéal de L_2, donc $f(\ker h) = 0$, d'après 1.1 et par conséquent $\ker h = 0$.

Rappelons que si L est une algèbre de Lie filtrée, son p^e prolongement normal ($p \geq 0$) est l'algèbre de Lie filtrée $L_{[p]}$ qui est égale à L comme algèbre de Lie et dont la filtration est donnée par:

$$(L_{[p]})^k = \begin{cases} L & \text{si } k \leq -1 , \\ L^{p+k} & \text{si } k \geq 0 . \end{cases}$$

Si L est transitive, $L_{[p]}$ l'est aussi.

1.3. Corollaire. *Soient L_1 et L_2 deux algèbres de Lie filtrées et $h\colon L_1 \to L_2$ un homomorphisme surjectif d'algèbres de Lie topologiques. Si L_2 est transitive, il existe un entier $d \geq 0$ tel que $h(L_1^{k+d}) \subset L_2^k$ pour tout entier k.*

Démonstration. Comme h est continu, il existe un entier $d \geq 0$ tel que $h(L_1^d) \subset L_2^0$. Il suffit, donc, d'appliquer proposition 1.2, 1) à $h\colon L_{1[d]} \to L_2$.

1.4. Corollaire. *Soient L_1, L_2 et L_3 des algèbres de Lie filtrées. Soient $\mu\colon L_1 \to L_2$ et $\nu\colon L_1 \to L_3$ des homomorphismes surjectifs d'algèbres de Lie filtrées. On suppose que L_3 est transitive et que* $\ker \mathrm{gr}_{-1} \mu \subset \ker \mathrm{gr}_{-1} \nu$. *Il existe alors un homomorphisme surjectif d'algèbres de Lie filtrées $h\colon L_2 \to L_3$ et un seul, tel que $h \circ \mu = \nu$.*

Démonstration. La condition $\ker \mathrm{gr}_{-1} \mu \subset \ker \mathrm{gr}_{-1} \nu$ implique que $\mu^{-1}(L_2^0) \subset \nu^{-1}(L_3^0)$. En particulier $\nu(\ker \mu) \subset L_3^0$. Comme ν est surjectif et que L_3 est transitive, on a, compte-tenu de 1.1, $\ker \mu \subset \ker \nu$. Il existe donc un homomorphisme surjectif d'algèbres de Lie $h\colon L_2 \to L_3$, et un seul, tel que $h \circ \mu = \nu$. Comme $\mu^{-1}(L_2^0) \subset \nu^{-1}(L_3^0)$, on a $h(L_2^0) \subset L_3^0$. Par suite, d'après proposition 1.2, 1) h est un homomorphisme d'algèbres de Lie filtrées.

1.5. Corollaire. *Soit L une algèbre de Lie filtrée, transitive et complète. Si $h\colon L \to L$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie filtrées tel que* $\mathrm{gr}_{-1} h$ *soit bijectif, alors h est un automorphisme de L.*

Démonstration. D'après proposition 1.2, 2), h est injectif et par suite pour tout $k \geq 0$ l'homomorphisme $h_k\colon L/L^k \to L/L^k$ induit par h est injectif, donc bijectif. Puisque L est complète, ceci implique que h est surjectif. On a donc le résultat compte-tenu de proposition 1.2, 3).

Terminons cette section avec la propriété suivante:

1.6. Propriété. *Soient L et M des algèbres de Lie filtrées et $h\colon L \to M$ un homomorphisme continu d'algèbres de Lie topologiques. Si L est complète, alors $h(L)$ est complète. En particulier $h(L)$ est fermé dans M.*

Démonstration. En effet L, muni de la topologie associée à sa filtration, est linéairement compact (cf. [3, § 1]) donc, h étant continu, $h(L)$ est un sous-espace linéairement compact, et par suite complet, de M.

2. Algèbre de Lie des dérivations sur une algèbre de series formelles

On considère un espace vectoriel V de dimension finie et l'on note $\hat{S}(V^*)$ l'algèbre locale des séries formelles à coefficients dans le dual V^* de V. Soit

$\mathscr{M}(V^*)$, ou $\mathscr{M}$ s'il n'y a pas risque de confusion, l'idéal maximal de $\hat{S}(V^*)$ et soit $\mathscr{M}^k(V^*)$ (ou $\mathscr{M}^k$) la k^e puissance de $\mathscr{M}$. Alors $\{\mathscr{M}^k\}$ est une filtration décroissante sur $\hat{S}(V^*)$ et $\hat{S}(V^*)$ muni de la topologie associée à cette filtration, est une algèbre topologique séparée et complète.

Soit $D(V)$ l'algèbre de Lie des dérivations de $\hat{S}(V^*)$. Pour $k \geq 1$, soit $D^k(V)$ l'ensemble des $X \in D(V)$ tels que $X\mathscr{M} \subset \mathscr{M}^{k+1}$. Alors $\{D^k(V)\}$ est une filtration décroissante sur $D(V)$ et $D(V)$ munie de cette filtration est une algèbre de Lie filtrée acyclique et complète (i.e., complète pour la topologie associée à cette filtration).

Si $x \in V$, on note $\partial/\partial x$ la dérivation suivant le vecteur x, i.e., la dérivation de $\hat{S}(V^*)$ définie par

$$\alpha_1 \cdots \alpha_k \in S^k(V^*) \mapsto \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(x)\alpha_1 \cdots \hat{\alpha}_i \cdots \alpha_k \in \alpha_k \in S^{k-1}(V^*) .$$

L'application $x \in V \mapsto \partial/\partial x \in D(V)$ nous permet d'identifier V à une sous-algèbre de Lie abélienne de $D(V)$.

On a un isomorphisme d'espaces vectoriels de $V \otimes \hat{S}(V^*)$ sur $D(V)$ défini par:

$$\Phi\colon x \otimes f \in V \otimes \hat{S}(V^*) \mapsto f\frac{\partial}{\partial x} \in D(V) .$$

Au moyen de Φ, on transporte à $V \otimes \hat{S}(V^*)$ la structure d'algèbre de Lie filtrée de $D(V)$. Le crochet sur $V \otimes \hat{S}(V^*)$ est alors donné par:

$$[x \otimes f, y \otimes g] = y \otimes \left(f\frac{\partial g}{\partial x}\right) - x \otimes \left(g\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

et la filtration:

$$(V \otimes \hat{S}(V^*))^k = V \otimes \mathscr{M}^{k+1} , \qquad k \geq -1 .$$

Dans la suite $V \otimes \hat{S}(V^*)$ sera toujours supposé muni de cette structure. On identifiera souvent les algèbres de Lie filtrées $D(V)$ et $V \otimes \hat{S}(V^*)$ au moyen de Φ. Remarquons que $\mathrm{gr}_k\, D(V)$ est ainsi identifié à $V \otimes S^{k+1}(V^*)$; plus précisément un élément $X \in \mathrm{gr}_k\, D(V)$, sera identifié à l'élément:

$$x_1 \cdots x_{k+1} \in S^{k+1}(V) \mapsto [x_{k+1}, [\cdots, [x_1, X]\cdots]] \in V$$

de $V \otimes S^{k+1}(V^*)$.

En vue d'applications en géométrie (cf. [8]), nous sommes amenés à caractériser tous les automorphismes de l'algèbre de Lie filtrée $D(V)$ à l'aide des automorphismes de l'algèbre filtrée $\hat{S}(V^*)$. Les résultats qui suivent, m'ont été, très aimablement, communiqués par Monsieur Alexandre A. M. Rodrigues.

On note Aut $\hat{S}(V^*)$ (resp. Aut $D(V)$) le groupe des automorphismes de l'algèbre filtrée $\hat{S}(V^*)$ (resp. de l'algèbre de Lie filtrée $D(V)$). On remarque que si $H \in \operatorname{Aut} \hat{S}(V^*)$, l'application:

$$H_*: X \in D(V) \mapsto H \circ X \circ H^{-1} \in D(V)$$

appartient à Aut $D(V)$. On se propose de montrer que tous les éléments de Aut $D(V)$ sont de cette forme.

Si $H \in \operatorname{Aut} \hat{S}(V^*)$, on écrira $H \equiv \mathrm{id}_{\hat{S}(V^*)} \bmod \mathscr{M}^k$ si $H(f) - f \in \mathscr{M}^k$ pour tout $f \in \hat{S}(V^*)$. On notera $\mathscr{G}^k$ le sous-groupe des $H \in \operatorname{Aut} \hat{S}(V^*)$ tels que $H \equiv \mathrm{id}_{\hat{S}(V^*)} \bmod \mathscr{M}^k$. De même, si $h \in \operatorname{Aut} D(V)$, on écrira $h \equiv \mathrm{id}_{D(V)} \bmod D^k(V)$, si $h(X) - X \in D^k(V)$ pour tout $X \in D(V)$.

Pour $X \in D(V)$, X^k $(k \geq -1)$ désigne sa composante homogène de degré k, i.e., $X^k \in V \otimes S^k(V^*)$ et $X = X^{-1} + X^0 + \cdots$. Si $h \in \operatorname{Aut} D(V)$ et $X \in D(V)$, on notera $h^k(X)$ la composante homogène de degré k de $h(X) - X$. Dire que $h \equiv \mathrm{id}_{D(V)} \bmod D^k(V)$ équivaut à dire que $h^{-1} = 0, \cdots, h^{k-1} = 0$.

2.1. Lemme. *Soit* $h \in \operatorname{Aut} D(V)$ *tel que* $h \equiv \mathrm{id}_{D(V)} \bmod D^k(V)$ $(k \geq 0)$. *Alors la restriction de* h^k *à* V *est un cocycle et* $h^k(X) = h^k(X^{-1})$ *pour tout* $X \in D(V)$.

Démonstration. Soit $X \in D(V)$ et $y \in V$. On a

$$(h([X, y]))^{k-1} = [X, y]^{k-1} = [X^k, y] .$$

D'autre part:

$$(h([X, y]))^{k-1} = [h(X), h(y)]^{k-1} = [X^k, y] + [X^{-1}, h^k(y)] + [h^k(X), y] .$$

On en déduit:

$$[X^{-1}, h^k(y)] - [y, h^k(X)] = 0 . \tag{2.2}$$

En supposant que $X = X^{-1} \in V$, on a, en particulier:

$$[X^{-1}, h^k(y)] - [y, h^k(X^{-1})] = 0 \tag{2.3}$$

ce qui exprime que la restriction de h^k à V est un cocycle. En comparant (2.2) et (2.3) on a:

$$[y, h^k(X)] = [y, h^k(X^{-1})]$$

d'où, par transitivité, $h^k(X) = h^k(X^{-1})$.

2.4. Lemme. *Sous les hypothèses de lemme* 2.1, *il existe* $H \in \mathscr{G}^{k+2}$ *tel que* $h \circ H_* \equiv \mathrm{id}_{D(V)} \bmod D^{k+1}(V)$.

Démonstration. Notons aussi h^k la restriction de h^k à V. Comme $h^k \in V \otimes S^{k+1}(V^*) \otimes V^*$ est un cocycle et que $D(V)$ est acyclique, il existe $\varphi \in V \otimes S^{k+2}(V^*)$ tel que $h^k = d\varphi$. Si l'on considère φ comme application de V^* dans

$S^{k+2}(V^*)$ et $[x, \varphi]$, pour $x \in V$, comme application de V^* dans $S^{k+1}(V^*)$, on a $h^k(x) = [x, \varphi] = (\partial/\partial x) \circ \varphi$.

Soit H l'extension à $\hat{S}(V^*)$ de l'application:

$$\alpha \in V^* \mapsto \alpha + \varphi(\alpha) \in \hat{S}(V^*) .$$

Un raisonnement simple montre que $H \in \mathscr{G}^{k+2}$. Posons $\gamma = h \circ H_*$. Il résulte de la construction de H et du fait que $h \equiv \mathrm{id}_{D(V)} \bmod D^k(V)$, que $\gamma \equiv \mathrm{id}_{D(V)} \bmod D^k(V)$. On montre, par un calcul, que $(H_*(x))^{-1} = x$ et que $(H_*(x))^k = -(\partial/\partial x) \circ \varphi = -h^k(x)$ pour tout $x \in V$. D'autre part, $\gamma^k(x) = h^k(H_*(x)) + (H_*(x))^k$; or, d'après lemme 2.1 $h^k(H_*(x)) = h^k((H_*(x))^{-1})$, donc $\gamma^k(x) = 0$ pour $x \in V$. En appliquant de nouveau lemme 2.1 on déduit $\gamma^k = 0$ i.e., $\gamma \equiv \mathrm{id}_{D(V)} \bmod D^{k+1}(V)$.

2.5. Théorème. *Pour tout* $h \in \mathrm{Aut}\, D(V)$, *il existe* $H \in \mathrm{Aut}\, \hat{S}(V^*)$, *et un seul, tel que* $h = H_*$.

Démonstration. Posons $\varphi = \mathrm{gr}_{-1}\, h$ et dénotons φ^* la transposée de φ. Soit H^1 l'extension de φ^* à $\hat{S}(V^*)$. Il résulte immédiatement des définitions que $h \circ H^1_* \equiv \mathrm{id}_{D(V)} \bmod D^0(V)$. Le lemme 2.2 affirme l'existence d'une suite $H^2, \cdots, H^k, \cdots$ d'éléments de $\mathrm{Aut}\, \hat{S}(V^*)$, telle que $H^k \in \mathscr{G}^k$ pour tout k et que $h \circ (H^1 \circ H^2 \circ \cdots \circ H^k)_* \equiv \mathrm{id}_{D(V)} \bmod D^k(V)$. Comme $H^k \in \mathscr{G}^k$, pour tout k, la suite $H^1 \circ H^2 \circ \cdots \circ H^k$ a une limite dans $\mathrm{Aut}\, \hat{S}(V^*)$. Soit H l'inverse de cette limite. On vérifie aisément que H répond à la question.

Soit H' un autre automorphisme de $\hat{S}(V^*)$ tel que $h = H'_*$ et soit $f \in \hat{S}(V^*)$. Si $X \in D(V)$ on a $h(fX) = H(f)h(X) = H'(f) \cdot h(X)$. On en déduit que $H(f) = H'(f)$ et par suite $H = H'$.

3. Algèbres projetables

On considère un espace vectoriel V de dimension $n + m$. Soit K un sous-espace de dimension m de V; on note $K \otimes_s S^k(V)$ le sous-espace de $S^{k+1}(V)$ engendré par les tenseurs symétriques de la forme $x_1 \cdots x_{k+1}$ avec $x_1 \in K$. Pour $k \geq 0$, soit $G_k(K)$ (ou G_k si aucune confusion n'est à craindre) le sous-espace de $V \otimes S^{k+1}(V^*)$ des éléments f tels que $f(K \otimes_s S^k(V)) \subset K$.

3.1. Lemme. *Pour tout* $k \geq 0$, *on a* $pG_k = G_{k+1}$ *où* $pG_k = G_k \otimes V^* \cap V \otimes S^{k+2}(V^*)$ *est le premier prolongement de* G_k.

Démonstration. Si $T \in V \otimes S^{k+2}(V^*)$ et $x \in V$, on note T_x l'élément de $V \otimes S^{k+1}(V^*)$ défini par $T_x(x_1 \cdots x_{k+1}) = T(x_1 \cdots x_{k+1} \cdot x)$. Il est alors immédiat que $T \in G_{k+1}$ si et seulement si $T_x \in G_k$ pour tout $x \in V$, i.e., si et seulement si $T \in pG_k$.

Une conséquence de lemme 3.1 est que le sous-espace gradué $V \oplus (\oplus_k G_k)$ de $\mathrm{gr}\, D(V)$ est en fait une sous-algèbre de Lie graduée. On la notera $G(K)$, ou simplement G s'il n'y a pas de confusion possible.

On considère maintenant un espace vectoriel W de dimension n et une application linéaire φ: $V \to W$ dont le noyau est K. Soit $S^{k+1}(\varphi)$: $S^{k+1}(V) \to$

$S^{k+1}(W)$ l'extension de φ à $S^{k+1}(V)$. Alors $\ker S^{k+1}(\varphi) = K \otimes_s S^k(V)$. Il s'ensuit que si $f \in V \otimes S^{k+1}(V^*)$, alors $f \in G_k$ si et seulement si, il existe $\bar{f} \in W \otimes S^{k+1}(W^*)$ tel que $\bar{f} \circ S^{k+1}(\varphi) = \varphi \circ f$. Cette application $\bar{f}$ est nécessairement unique; on la note $\varphi_k(f)$. Il est clair que nous avons ainsi défini une application linéaire surjective φ_k de G_k sur $W \otimes S^{k+1}(W^*)$. La noyau de φ_k est isomorphe à $K \otimes S^{k+1}(V^*)$ donc

$$\dim G_k = n \dim S^{k+1}(W^*) + m \dim S^{k+1}(V^*) \ . \tag{3.2}$$

Considérons une base $e_1, \cdots, e_{n+m}$ de V telle que $e_{n+1}, \cdots, e_{n+m}$ soit une base de K; on notera $e^1, \cdots, e^{n+m}$ la base duale. Il est clair que les vecteurs $e_i \otimes e^{j_1} \cdots e^{j_{k+1}}$ avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_{k+1} \leq n$ ou $n < i \leq n + m$ et $1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_{k+1} \leq n + m$ constituent une base de G_k.

Si l'on considère, de nouveau, un espace vectoriel W de dimension n et une application linéaire $\varphi\colon V \to W$ de noyau K, posons $\varepsilon_i = \varphi(e_i)$ $(i = 1, \cdots, n)$. Alors $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ est une base de W; on notera $\varepsilon^1, \cdots, \varepsilon^n$ la base duale. On remarque que:

$$\begin{aligned} &\varphi_k(e_i \otimes e^{j_1} \cdots e^{j_{k+1}}) = \varepsilon_i \otimes \varepsilon^{j_1} \cdots \varepsilon^{j_{k+1}} \\ &\qquad\qquad \text{si } 1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_{k+1} \leq n \ , \\ &\varphi_k(e_i \otimes e^{j_1} \cdots e^{j_{k+1}}) = 0 \\ &\qquad\qquad \text{si } n < i \leq n + m \text{ et } 1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_{k+1} \leq n + m \ . \end{aligned}$$

Il en résulte que l'homomorphisme gradué $(\varphi, \varphi_0, \cdots, \varphi_k, \cdots)$ de G sur $\operatorname{gr} D(W)$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie graduées.

3.3. Lemme. *La base $e_1, \cdots, e_{n+m}$ de V est quasi-régulière par rapport à G_0. En particulier G_0 est un sous-espace involutif de $V \otimes V^*$* (cf. [6, pp. 29–30]).

Démonstration. Pour $s = 0, \cdots, n + m - 1$ soit V_s^* le sous-espace de V^* engendré par $e^{s+1}, \cdots, e^{n+m}$. Posons $\tau_s = \dim (G_0 \cap V \otimes V_s^*)$. Pour $s = 0, \cdots, n - 1$ (resp. $s = n, \cdots, n + m - 1$) les vecteurs $e_i \otimes e^j$ avec $1 \leq i \leq n$ et $s < j \leq n$ ou $n < i \leq n + m$ et $s < j \leq n + m$ (resp. $n < i \leq n + m$ et $s < j \leq n + m$) constituent une base de $G_0 \cap V \otimes V_s^*$; on en déduit que $\tau_s = n(n - s) + m(n + m - s)$ (resp. $\tau_s = m(n + m - s)$). On en déduit que $\sum \tau_s = \dim G_1$ (cf. (3.2)). On a donc le résultat compte-tenu de lemme 3.1 et de la proposition 6.1 de [6].

Notons $\hat{G}$ le complété de G. Alors $\hat{G}$ est une sous-algèbre de Lie plate de $D(V)$. En plus les lemmes 3.1 et 3.3 et un théorème bien connu de Serre (cf. [4] ou [9, proposition 4.6]) impliquent que $\hat{G}$ est acyclique. Pour tout homomorphisme $\varphi\colon V \to W$ de noyau K, on note $\hat{\varphi}$ le prolongement par continuité de $(\varphi, \varphi_0, \cdots, \varphi_k, \cdots)$ à $\hat{G}$. Alors $\hat{\varphi}$ est un homomorphisme surjectif d'algèbres de Lie filtrées de $\hat{G}$ sur $D(W)$.

Soit L une sous-algèbre de Lie transitive de $D(V)$. Si K est un sous-espace de dimension m de V invariant par $\mathrm{gr}_0 L$, alors $\mathrm{gr}\, L \subset G(K)$. On notera $I_m(L)$ l'ensemble des sous-espaces K de dimension m de V qui sont invariants par $\mathrm{gr}_0 L$ et tels que l'inclusion $V \oplus \mathrm{gr}_0 L \to V \oplus G_0(K)$ soit un homomorphisme d'algèbres de Lie tronquées de $\mathrm{Tr}\, L = (V, \mathrm{gr}_0 L, \omega(L))$ dans $\mathrm{Tr}\, \hat{G}(K) = (V, G_0(K), 0)$. Cette dernière condition signifie que $i^*\omega(L) = 0$ (cf. appendice II), i.e., si τ est la torsion d'une connexion de L alors τ appartient à l'image de d dans le complexe:

$$0 \longrightarrow G_1(K) \longrightarrow G_0(K) \otimes V^* \xrightarrow{d} V \otimes \Lambda^2 V^* \longrightarrow 0 .$$

Le lemme suivant détermine cette image.

3.4. Lemme. *L'image de d: $G_0(K) \otimes V^* \to V \otimes \Lambda^2 V^*$ est égale au sous-espace vectoriel $\mathcal{S}$ de $V \otimes \Lambda^2 V^*$ formé des éléments S tels que $S(\Lambda^2 K) \subset K$.*

Démonstration. L'inclusion $\mathrm{Im}\, d \subset \mathcal{S}$ est immédiate. D'autre part, on a $\dim \mathrm{Im}\, d = \dim G_0(K) \otimes V^* - \dim \mathrm{Ker}\, d$. Or $\mathrm{Ker}\, d = pG_0(K)$; compte tenu de lemme 3.1 et (3.2) un calcul montre que $\dim \mathrm{Im}\, d = \dim \mathcal{S}$, donc $\mathrm{Im}\, d = \mathcal{S}$.

Pour une autre caractérisation de l'ensemble $I_m(L)$ on aura besoin du lemme suivant:

3.5. Lemme. *Soit W un espace vectoriel de dimension n et φ: $V \to W$ une application linéaire surjective. On munit* $\mathrm{gr}\, D(W)$ *de la structure de V-module associée à φ. Considérons son deuxième complexe de Spencer*:

$$0 \longrightarrow W \otimes S^2(W^*) \longrightarrow W \otimes W^* \otimes V^* \xrightarrow{d} W \otimes \Lambda^2 V^* \longrightarrow 0 .$$

Alors l'image de d: $W \otimes W^* \otimes V^* \to W \otimes \Lambda^2 V^*$ est égale au sous-espace $\mathcal{T}$ de $W \otimes \Lambda^2 V^*$ formé des éléments T tels que $T(\Lambda^2 K) = 0$ où $K =$ $\mathrm{Ker}\, \varphi$.

Démonstration. Il est clair que $\mathrm{Im}\, d \subset \mathcal{T}$. On a, d'autre part

$$H^{1,1}(V, \mathrm{gr}\, D(W)) = H^{2,0}(V, \mathrm{gr}\, D(W)) = 0$$

donc $\dim \ker d = \dim W \otimes S^2(W^*)$; par suite

$$\dim \mathrm{Im}\, d = \dim W \otimes W^* \otimes V^* - \dim W \otimes S^2(W^*) .$$

Par ailleurs, $\dim \mathcal{T} = \dim W.\ \mathrm{codim}\, \Lambda^2 K$. En effectuant les calculs on trouve

$$\dim \mathrm{Im}\, d = \mathrm{Dim}\, \mathcal{T} \quad \text{donc} \quad \mathrm{Im}\, d = \mathcal{T} .$$

En conservant les notations précédentes on a:

3.6. Proposition. *Soit K un sous-espace de dimension m de V, invariant par* $\mathrm{gr}_0 L$. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

1) $K \in I_m(L)$,

2) *pour tout homomorphisme surjectif φ: $V \to W$ de noyau K, $(\varphi, \bar{\varphi})$: $V \oplus \mathrm{gr}_0 L \to W \oplus W \otimes W^*$, où $\bar{\varphi}$ est la restriction de φ_0: $G_0(K) \to W \otimes W^*$ à*

$\mathrm{gr}_0 L$, *est un homomorphisme d'algèbres de Lie tronquées de* $\mathrm{Tr}\, L = (V, \mathrm{gr}_0 L, \omega(L))$ *dans* $\mathrm{Tr}\, D(W) = (W, W \otimes W^*, 0)$.

Cette proposition est une conséquence immédiate des lemmes 3.4 et 3.5. On en déduit:

3.7. Proposition. *Soit L une sous-algèbre de Lie transitive de $D(V)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1) *Pour tout espace vectoriel W de dimension n il existe un homomorphisme d'algèbres de Lie filtrées $h: L \to D(W)$, tel que $h(L)$ soit une sous-algèbre transitive de $D(W)$.*

2) *Pour tout espace vectoriel W de dimension n il existe un homomorphisme d'algèbres de Lie tronquées $(\varphi, \bar{\varphi})$: $\mathrm{Tr}\, L \to \mathrm{Tr}\, D(W)$ tel que $\varphi: V \to W$ soit surjectif.*

3) $I_m(L) \neq \emptyset$.

4) *Il existe un sous-espace K, de dimension m, de V et $j \in \mathrm{Aut}\, D(V)$ tel que $\mathrm{gr}\, j = \mathrm{id}$ et que $j(L) \subset \hat{G}(K)$.*

Démonstration. Le fait que 1) implique 2) est immédiat. Si l'on admet 2) alors il est clair que, pour un tel homomorphisme $(\varphi, \bar{\varphi})$, $\mathrm{Ker}\, \varphi \in I_m(L)$. Supposons maintenant que 3) soit vraie. Prenons $K \in I_m(L)$; l'existence de $j \in \mathrm{Aut}\, D(V)$ satisfaisant 4) résulte du corollaire 3.6 de [7] et du théorème 1 de [5] compte tenu de l'acyclicité de $\hat{G}(K)$ et de $D(V)$. Pour terminer admettons 4) et montrons 1). Soit $\varphi: V \to W$ une application linéaire surjective de noyau K; alors la restriction h de $\hat{\varphi} \circ j$ à L satisfait 1).

3.8. Définition. Une sous-algèbre transitive L de $D(V)$ est dite n-projetable si elle satisfait à une des quatre conditions équivalentes de proposition 3.7. On notera $\pi_n(V)$ l'ensemble des sous-algèbres n-projetables de $D(V)$. Si $L \in \pi_n(V)$, un homomorphisme h satisfaisant à la condition 1) de proposition 3.7 est dit une projection.

Il est clair que si K est un sous-espace de dimension m de V, alors $\hat{G}(K) \in \pi_n(V)$. En plus, on a le résultat suivant, dont la vérification est immédiate.

3.9. Lemme. *Soient K et K' des sous-espaces de dimension m de V et f un automorphisme de V tel que $f(K) = K'$. Si F est l'extension de f à $D(V)$ on a $F(\hat{G}(K)) = \hat{G}(K')$.*

De lemme 3.9 et corollaire 1.5, on déduit:

3.10. Proposition. *Pour tout sous-espace de dimension m de V, $\hat{G}(K)$ est un élément maximal de $\pi_n(V)$. Inversement, si P est un élément maximal de $\pi_n(V)$, $I_m(P)$ est réduit à un seul élément; si K est cet élément il existe $j \in \mathrm{Aut}\, D(V)$ tel que $\mathrm{gr}\, j = \mathrm{id}$ et que $j(P) = \hat{G}(K)$.*

On notera $\pi_n^{\max}(V)$ l'ensemble des éléments maximaux de $\pi_n(V)$. On se propose de caractériser l'ensemble $\pi_n^{\max}(V, L)$ des éléments de $\pi_n^{\max}(V)$ contenant un élément donné $L \in \pi_n(V)$. On montre d'abord:

3.11. Lemme. *Soient M et P des sous-algèbres transitives de $D(V)$ telles que $\mathrm{gr}_0 M \subset \mathrm{gr}_0 P$ et que $M \cap P$ soit une sous-algèbre transitive de $D(V)$. Alors si $H^{i,1}(P) = 0$ pour tout $i \geq 1$ on a $M \subset P$.*

Démonstration. Posons $N = M \cap P$. Par hypothèse N est transitive, donc $M/M^1 = N/N^1 + \mathrm{gr}_0 M$ et $P/P^1 = N/N^1 + \mathrm{gr}_0 P$. Il en résulte que $M/M^1 \subset P/P^1$. D'après le théorème 1 de [5] il existe un unique homomorphisme injectif d'algèbres de Lie filtrées $i_1 \colon M \to P$ qui prolonge les inclusions $N \to P$ et $M/M^1 \to P/P^1$. D'après le même théorème il existe $i_2 \in \mathrm{Aut}\, D(V)$ et un seul qui prolonge i_1. Or i_2 est aussi un prolongement de l'inclusion $N \to D(V)$. Compte tenu de l'unicité de ces prolongements, on a $i_2 = \mathrm{id}$, donc $M \subset P$.

3.12. Proposition. *Soit $L \in \pi_n(V)$. Pour tout $K \in I_m(L)$ il existe un unique élément, noté $P(L, K)$, de $\pi_n^{\max}(V, L)$ tel que $\mathrm{gr}_0 P(L, K) = G_0(K)$. Inversement, pour tout $P \in \pi_n^{\max}(V, L)$ l'unique élément K de $I_m(P)$ appartient à $I_m(L)$ et $P = P(L, K)$.*

Démonstration. On a déjà remarqué que pour tout $K \in \mathrm{Im}\,(L)$ il existe $j \in \mathrm{Aut}\, D(V)$ tel que $\mathrm{gr}\, j = \mathrm{id}$ et que $j(L) \subset \hat{G}(K)$. L'algèbre de Lie $P = j^{-1}(\hat{G}(K))$ appartient à $\pi_n^{\max}(V, L)$ et $\mathrm{gr}_0 P = G_0(K)$. L'unicité de P, satisfaisant à ces conditions résulte de lemme 3.11. La réciproque est immédiate.

4. Projections et théorèmes de prolongement

On conserve ici les données et notations de la section antérieure. On se donne en plus un espace vectoriel W de dimension n. Rappelons que si K est un sous-espace de dimension m de V et si $\varphi \colon V \to W$ est une application linéaire de noyau K, alors φ induit un homomorphisme surjectif d'algèbres de Lie filtrées $\hat{\varphi} \colon \hat{G}(K) \to D(W)$.

4.1. Proposition. *Soit $L \in \pi_n(V)$ et soit $h \colon L \to D(W)$ une projection. Posons $\mathrm{gr}_{-1} h = \varphi$ et $\mathrm{Ker}\, \varphi = K$. Il existe alors $j \in \mathrm{Aut}\, D(V)$ tel que $\mathrm{gr}\, j = \mathrm{id}$ et que $j(L) \subset \hat{G}(K)$. Pour chaque tel j, il existe $\mu \in \mathrm{Aut}\, D(W)$, et un seul, tel que $\hat{\varphi} \circ j = \mu \circ h$.*

Démonstration. On remarque que $K \in I_m(L)$. L'existence de j résulte de proposition 3.12 et de proposition 3.10. Pour chaque tel j on a $\mathrm{gr}_1 (\hat{\varphi} \circ j) = \mathrm{gr}_{-1} h$; l'existence et unicité de μ est alors une conséquence de 1.4 et du théorème 1 de [5].

4.2. Corollaire. *Si $P \in \pi_n^{\max}(V)$, toute projection $h \colon P \to D(W)$ est surjective.*

4.3. Proposition. *Soient $P, P' \in \pi_n^{\max}(V)$ et $h \colon P \to D(W)$, $h' \colon P' \to D(W)$ des projections. Il existe $\lambda \in \mathrm{Aut}\, D(V)$ tel que $\lambda(P) = P'$. Pour chaque tel λ il existe $\mu \in \mathrm{Aut}\, D(W)$ et un seul tel que $h' \circ \lambda = \mu \circ h$.*

Démonstration. Soient K et K' les éléments de $I_m(P)$ et $I_m(P')$ respectivement. Soient j, j' et F des automorphismes de $D(V)$ tels que $\mathrm{gr}\, j = \mathrm{gr}\, j' = \mathrm{id}$, $j(P) = \hat{G}(K)$, $j'(P') = \hat{G}(K')$ et $F(\hat{G}(K)) = \hat{G}(K')$ (cf. lemme 3.9 et proposition 3.10). On peut prendre $\lambda = (j')^{-1} \circ F \circ j$.

On considère maintenant un tel λ. Comme K et K' sont les seuls sous-espaces de dimension m de V laissés invariants par $\mathrm{gr}_0 P$ et $\mathrm{gr}_0 P'$ respectivement, on a nécessairement $K = \mathrm{Ker}\, \mathrm{gr}_{-1} h$, $K' = \mathrm{Ker}\, \mathrm{gr}_{-1} h$ et $\mathrm{gr}_{-1} \lambda(K) = K'$; par suite

$\operatorname{Ker} \operatorname{gr}_{-1}(h' \circ \lambda) = \operatorname{Ker} \operatorname{gr}_{-1} h$. L'existence et unicité de μ résulte alors de corollaire 1.4 et de corollaire 4.2.

On en déduit le théorème de prolongement suivant qui est, d'une certaine manière, une généralisation du théorème 1 de [5].

4.4. Corollaire. *Soit $L \in \pi_n(V)$ et soit $h: L \to D(W)$ une projection. Il existe $P \in \pi_n^{\max}(V)$ et une projection $\tilde{h}: P \to D(W)$ vérifiant:*

1) $P \supset L$,

2) *h est la restriction de $\tilde{h}$ à L.*

En plus le couple $(P, \tilde{h})$ satisfaisant 1) et 2) est unique.

Démonstration. Posons $\operatorname{gr}_{-1} h = \varphi$ et $\operatorname{Ker} \varphi = K$. D'après proposition 4.1 il existe $j \in \operatorname{Aut} D(V)$ et $\mu \in \operatorname{Aut} D(W)$ tels que $j(L) \subset \hat{G}(K)$ et que $\hat{\varphi} \circ j = \mu \circ h$. Posons $P = j^{-1}(\hat{G}(K))$ et $\tilde{h} = \mu^{-1} \circ \hat{\varphi} \circ j: P \to D(W)$. Il est clair que le couple $(P, \tilde{h})$ satisfait aux conditions 1) et 2).

Pour montrer l'unicité de $(P, \tilde{h})$ on remarque d'abord que $K \in I_m(P)$ donc c'est son unique élément (cf. proposition 3.10). D'après proposition 3.12 on a $P = P(L, K)$. Si $\tilde{h}'$ est un autre prolongement de h à P, il existe, d'après proposition 4.3, $\xi \in \operatorname{Aut} D(W)$ et un seul tel que $\tilde{h}' = \xi \circ \tilde{h}$. La restriction de ξ à $h(L)$ est l'inclusion de $h(L)$ dans $D(W)$. Comme $h(L)$ est une sous-algèbre transitive de $D(W)$, le théorème 1 de [5] affirme que $\xi = \mathrm{id}$, donc $\tilde{h} = \tilde{h}'$.

Pour terminer ce travail on montrera un théorème de prolongement d'homomorphismes d'algèbres de Lie tronquées qui généralise le corollaire 3.6 de [7].

4.5. Théorème. *Soient L et M des sous-algèbres de Lie transitives de $D(V)$ et $D(W)$ respectivement. On suppose qu'il existe un homomorphisme d'algèbres de Lie tronquées $(\varphi, \bar{\varphi})$: $\operatorname{Tr} L \to \operatorname{Tr} M$ avec φ surjective (ce qui implique $L \in \pi_n(V)$). Si M est 2-acyclique et complète, il existe un prolongement $h: L \to M$ de $(\varphi, \bar{\varphi})$. En plus deux prolongements de $(\varphi, \bar{\varphi})$ diffèrent par un automorphisme de $D(W)$ qui préserve M.*

Démonstration. On peut considérer $(\varphi, \bar{\varphi})$ comme homomorphisme de $\operatorname{Tr} L$ dans $\operatorname{Tr} D(W)$. Posons $K = \operatorname{Ker} \varphi$. Alors $K \in I_m(L)$, d'après proposition 3.6 donc il existe $j \in \operatorname{Aut} D(V)$ tel que $\operatorname{gr} j = \mathrm{id}$ et $j(L) \subset \hat{G}(K)$. Posons $M' = \hat{\varphi}(j(L))$. Alors M' est une sous-algèbre transitive de $D(W)$ et $\operatorname{gr}_0 M' \subset \operatorname{gr}_0 M$. Soit $(i, \bar{i})$: $W \oplus \operatorname{gr}_0 M' \to W \oplus \operatorname{gr}_0 M$ l'inclusion. Considérons le deuxième complexe de Spencer de $\operatorname{gr} M$ muni de la structure de V-module définie au moyen de φ:

$$0 \longrightarrow \operatorname{gr}_1 M \longrightarrow \operatorname{gr}_0 M \otimes V^* \xrightarrow{d} W \otimes \Lambda^2 V^* \longrightarrow 0 .$$

Par hypothèse, on a $\varphi^* \omega(L) = \varphi_* \omega(M)$, i.e., si σ et τ sont les torsions de deux connexions de L et M respectivement, on a $\tau \circ \Lambda^2 \varphi - \varphi \circ \sigma = df$ où $f \in \operatorname{gr}_0 M \otimes V^*$. Soit maintenant

$$0 \longrightarrow \operatorname{gr}_1 M' \longrightarrow \operatorname{gr}_0 M' \otimes V \xrightarrow{d} W \otimes \Lambda^2 V \longrightarrow 0$$

le deuxième complexe de Spencer du V-module $\operatorname{gr} M'$. On a $\varphi^*\omega(L) = \varphi_*\omega(M')$, i.e., si τ' est la torsion d'une connexion de M', on a $\tau' \circ \Lambda^2\varphi - \varphi \circ \tau = df'$ où $f' \in \operatorname{gr}_0 M' \otimes V^* \subset \operatorname{gr}_0 M \otimes V^*$. Il en résulte que $\tau \circ \Lambda^2\varphi - \tau' \circ \Lambda^2\varphi = d(f - f')$. Soit $x \in K$ et $y \in V$; on a $(\tau \circ \Lambda^2\varphi - \tau' \circ \Lambda^2\varphi)(x, y) = 0$ et $[\varphi x, (f - f')(y)] = 0$ donc $[\varphi y, (f - f')(x)] = 0$ d'où, par transitivité $(f - f')(x) = 0$. Il s'ensuit que $K \subset \operatorname{Ker}(f - f')$ et par suite il existe $g \in \operatorname{gr}_0 M \otimes W^*$ tel que $f - f' = g \circ \varphi$. On a donc $\tau \circ \Lambda^2\varphi - \tau' \circ \Lambda^2\varphi = dg \circ \Lambda^2\varphi$, d'où, $\Lambda^2\varphi$ étant surjective, $\tau - \tau' = dg$, i.e., $i^*\omega(M') = i_*\omega(M)$, donc $(i, \bar{i})$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie tronquées de $\operatorname{Tr} M'$ dans $\operatorname{Tr} M$. Comme M est 2-acyclique, le corollaire 3.6 de [7] entraîne l'existence d'un prolongement injectif ν: $M' \to M$ de $(i, \bar{i})$. Alors $h = \nu \circ \hat{\varphi} \circ j$ est un prolongement de $(\varphi, \bar{\varphi})$.

Soit h' un autre prolongement de $(\varphi, \bar{\varphi})$. Il est clair que h et h' sont des projections. Soient $\tilde{h}$ et $\tilde{h}'$ les prolongements de h et h', respectivement, à $P = P(L, K)$, (cf. corollaire 4.4). D'après proposition 4.3, il existe $\mu \in \operatorname{Aut} D(W)$ et un seul tel que $\tilde{h}' = \mu \circ \tilde{h}$. On a nécessairement $\operatorname{gr} \mu = \mathrm{id}$ donc μ: $h(L) \to M$ est un prolongement de l'inclusion $W \oplus \operatorname{gr}_0 h(L) \to W \oplus \operatorname{gr}_0 M$. La deuxième partie du corollaire 3.6 de [7] implique alors que $\mu(M) = M$.

5. Appendices

5.1. Cohomologie de V-modules. Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Un V-module gradué (géométrique) est un espace vectoriel gradué $M = \oplus_{q \in Z} M_q$ muni d'une application bilinéaire $(x, m) \in V \times M \to xm \in M$ vérifiant:

1) $x(ym) = y(xm)$ pour tous $x, y \in V$ et tout $m \in M$,
2) $V \cdot M_q \subset M_{q-1}$ pour tout $q \in Z$,
3) $M_q = 0$ si $q \leq -2$.

Soit M un V-module gradué; on pose $C^{q+1,n}(V, M) = \operatorname{Hom}(\Lambda^n V, M_q)$ et $C(V, M) = \oplus_n (\oplus_q C^{q+1,n}(V, M))$. On définit l'opérateur d: $C(V, M) \to C(V, M)$ par

$$f \in C^{q+1,n}(V, M) \to df \in C^{q,n+1}(V, M) ,$$

$$df(x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} x_i f(x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_{n+1}) .$$

On montre que $d \circ d = 0$. Pour tout q on a donc un complexe ($(q + 1)^e$ complexe de Spencer du V-module M):

$$0 \longrightarrow C^{q+1,0}(V, M) \xrightarrow{d} C^{q,1}(V, M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} C^{q-k,k+1}(V, M) \longrightarrow \cdots$$

dont on notera $H^{q-k,k+1}(V, M)$ la cohomologie en $C^{q-k,k+1}(V, M)$.

Pour tout entier $n \geq 0$ on note $i_n(V, M)$ le plus petit entier positif ou nul, s'il existe, tel que $H^{i+1,j}(V, M) = 0$ pour $j = 0, \cdots, n$ et $i \geq i_n(V, M)$. Si $i_n(V, M) = 0$, on dira que M est un V-module n-acyclique. Si $i_n(V, M) = 0$

pour tout n, M sera dit acyclique. Au lieu de 0-acyclique on dira souvent transitif.

On montre (cf. [7]) que si M est transitif alors pour tout entier n, $i_n(V, M)$ existe.

Si U est un autre espace vectoriel de dimension finie et $\varphi: U \to V$ une application linéaire, on peut munir M d'une structure de U-module en définissant la loi d'opération de U sur M comme suit: $(x, m) \in U \times M \mapsto \varphi(x)m \in M$. On peut montrer que si φ est surjective, on a $i_n(U, M) = i_n(V, M)$ pour tout $n \geq 0$ (cf. [7] et [5, lemme 1]).

Soit $G = \oplus_{k \in Z} G_k$ une algèbre de Lie graduée géométrique (i.e., $G_k = 0$ si $k \leq -2$). On peut considérer G comme G_{-1}-module, la loi bilinéaire $G_{-1} \times G \to G$ étant le crochet. La cohomologie du G_{-1}-module G est la cohomologie de Spencer de G. La cohomologie de Spencer d'une algèbre de Lie filtrée géométrique L, est la cohomologie de Spencer de l'algèbre de Lie graduée associée. On posera $H^{i,j}(L) = H^{i,j}(\mathrm{gr}_{-1} L, \mathrm{gr}\, L)$.

5.2. Homomorphismes d'algèbres de Lie tronquées. Soient L_1 et L_2 deux algèbres de Lie filtrées. Posons $V_1 = \mathrm{gr}_{-1} L_1$ et $V_2 = \mathrm{gr}_{-1} L_2$. Alors $V_1 \oplus \mathrm{gr}_0 L_1$ et $V_2 \oplus \mathrm{gr}_{-1} L_2$ sont des sous-algèbres de Lie graduées de $\mathrm{gr}\, L_1$ et $\mathrm{gr}\, L_2$ respectivement.

Soit $(\varphi, \bar{\varphi})$: $V_1 \oplus \mathrm{gr}_0 L_1 \to V_2 \oplus \mathrm{gr}_0 L_2$ un homomorphisme d'algèbres de Lie graduées. On considère les homomorphismes:

$$\alpha \in V_1 \otimes \Lambda^2 V_1^* \mapsto \varphi_0 \alpha \in V_2 \otimes \Lambda^2 V_1^* , \qquad \beta \in V_2 \otimes \Lambda^2 V_2^* \mapsto \beta_0 \Lambda^2 \varphi \in V_2 \otimes \Lambda^2 V_1^* ,$$

qui induisent les homomorphismes:

$$\varphi^*: H^{0,2}(L_1) \to H^{0,2}(V_1, V_2 \oplus \mathrm{gr}_0 L_2) , \qquad \varphi_*: H^{0,2}(L_2) \to H^{0,2}(V_1, V_2 \oplus \mathrm{gr}_0 L_2)$$

respectivement, où $H^{0,2}(V_1, V_2 \oplus \mathrm{gr}_0 L_2)$ est le groupe de cohomologie, de bidegré $(0, 2)$ de $V_2 \oplus \mathrm{gr}_0 L_2$, muni de la structure de V_1-module définie au moyen de φ.

Définition. On dira que $(\varphi, \bar{\varphi})$ est un homomorphisme de $\mathrm{Tr}\, L_1 = (V_1, \mathrm{gr}_0 L_1, \omega(L_1))$ dans $\mathrm{Tr}\, L_2 = (V_2, \mathrm{gr}_0 L_2, \omega(L_2))$ si $\varphi^* \omega(L_1) = \varphi_* \omega(L_2)$. On dira que $(\varphi, \bar{\varphi})$ est n-acyclique (resp. acyclique) si le V_1-module $\mathrm{gr}\, L_2$ est n-acyclique (resp. acyclique).

Si h: $L_1 \to L_2$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie filtrées, on montre facilement que $(\mathrm{gr}_{-1} h, \mathrm{gr}_0 h)$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie tronquées de $\mathrm{Tr}\, L_1$ dans $\mathrm{Tr}\, L_2$. On dit que $(\mathrm{gr}_{-1} h, \mathrm{gr}_0 h)$ est induit par h ou que h est un prolongement de $(\mathrm{gr}_{-1} h, \mathrm{gr}_0 h)$.

6. Notations

$\{L^k\}_{k \geq -1}$	:	filtration d'une algèbre de Lie filtrée L
$\mathrm{gr}_k\, L$	:	noyau de l'épimorphisme canonique: $L/L^k \to L/L^{k-1}$

$\operatorname{gr} L = \bigoplus \operatorname{gr}_k L$: algèbre de Lie graduée associée à L

$\operatorname{gr} h = (\operatorname{gr}_{-1} h, \cdots, \operatorname{gr}_k h, \cdots)$: homomorphisme graduée induit par un homomorphisme filtré h

$h_k \colon L/L^k \to M/M^k$: homomorphisme induit par un homomorphisme filtré $h \colon L \to M$

ρ_k $(k \geq -1)$: projection de L sur L/L^{k+1} ou de L^k sur $\operatorname{gr}_k L$

$L_{[p]}$ $(p \geq 0)$: p^e prolongement normal d'une algèbre de Lie filtrée L (cf. p. 453)

$\hat{S}(V)$: algèbre des séries formelles à coefficients dans un espace vectoriel V

$\mathscr{M}(V)$ ou $\mathscr{M}$: idéal maximal de $\hat{S}(V)$

$\mathscr{M}^k(V)$ ou $\mathscr{M}^k$: k^e puissance de $\mathscr{M}(V)$

$D(V)$: algèbre de Lie filtrée des dérivations de $\hat{S}(V^*)$

$\{D^k(V)\}_{k \geq -1}$: filtration de $D(V)$

$\operatorname{Aut} \hat{S}(V)$: groupe des automorphismes de l'algèbre filtrée $\hat{S}(V)$

$\operatorname{Aut} D(V)$: groupe des automorphismes de l'algèbre de Lie filtrée $D(V)$

$G_k(K), G(K)$: cf. § 3

φ_k : cf. § 3

$\hat{\varphi}$: cf. § 3

$\omega(L)$: tenseur de structure d'une algèbre de Lie filtrée L

$\operatorname{Tr} L = (\operatorname{gr}_{-1} L, \operatorname{gr}_0 L, \omega(L))$: première algèbre de Lie tronquée de L

$\pi_n(V)$: cf. définition 3.8

$\pi_n^{\max}(V), \pi_n^{\max}(V, L)$: cf. § 3 et proposition 3.12

$I_m(L)$: cf. § 3 et lemme 3.4

$P(L, K)$: cf. proposition 3.12

Bibliographie

[1] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, chap. 3, Hermann, Paris, 1961.

[2] ——, *Algèbre*, chap. 4, Hermann, Paris, 1950.

[3] V. Guillemin, *A Jordan-Hölder decomposition for a certain class of infinite dimensional Lie algebras*, J. Differential Geometry **2** (1968) 313–345.

[4] V. Guillemin & S. Sternberg, *An algebraic model of transitive differential geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1964) 16–47.

[5] I. Hayashi, *Embedding and existence theorems of infinite Lie algebra*, J. Math. Soc. Japan **22** (1970) 1–14.

[6] M. Kuranishi, *Lectures on involutive systems of partial differential equations*, Publication de Soc. Mat. São Paulo, 1967.

[7] D. S. Rim, *Deformations of transitive Lie algebras*, Ann. of Math. **83** (1966) 339–357.

[8] A. Rodrigues & A. Petitjean, *Correspondance entre algèbres de Lie abstraites et pseudo-groupes de Lie transitifs*, à paraître dans Ann. of Math.

[9] I. M. Singer & Sternberg, *The infinite groups of Lie and Cartan. Part* I (*The transitive case*), J. Analyse Math. **15** (1965) 306–445.

UNIVERSITÉ DE BRASÍLIA, BRASIL